第六章

微分方程

已知 $y' = f(x)$, 求 y —— 积分问题

$\Big\downarrow$ 推广

已知含 y 及其若干阶导数的方程, 求 y

—— 微分方程问题

第一节 常微分方程的基本概念

一、引例

例 1 一曲线通过点(1,2),且在该曲线上任一点 $M(x,y)$处的切线的斜率为$2x$，求这曲线的方程.

解 设所求曲线为 $y = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad \text{其中 } x = 1\text{时}, \; y = 2$$

$$y = \int 2x\,dx \qquad \text{即 } y = x^2 + C, \quad \text{求得} C = 1,$$

所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

二、微分方程的概念

微分方程:

凡含有未知函数的导数或微分的方程叫微分方程.

$$y' = xy, \quad y'' + 2y' - 3y = e^x, \; (t^2 + x)dt + xdx = 0$$

分类 $\begin{cases} \text{常微分方程（本章内容）} \\ \text{偏微分方程 \quad 已知 } \dfrac{\partial z}{\partial x} = x + y, \text{求 } z = z(x, y) \end{cases}$

方程中所含未知函数导数的最高阶数叫做**微分方程的阶**.

$$y'' + 2y' - 3y = e^x, \quad \text{二阶} \qquad (y')^2 = xy, \quad \text{一阶}$$

一般地，n 阶常微分方程的形式是

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

或 $y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ (n 阶显式微分方程)

线性微分方程：未知函数及其导数都是一次的，且不含有这些变量的乘积形式

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

常系数微分方程：$a_0(x)$, $a_1(x)$, $\cdots$, $a_n(x)$都是常数

齐次：$f(x) = 0$ 非齐次：$f(x) \neq 0$

三、微分方程的解

微分方程的解： 代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称为微分方程的解.

微分方程的解的分类：

(1) 通解： 微分方程的解中含有任意常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同.

$y'' + y = 0,$ 通解 $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x;$

说明： 通解不一定是方程的全部解 .

例如, 方程 $(x+y)y' = 0$ 有解 $y = -x$ 及 $y = C$

后者是通解，但不包含前一个解 .

(2) 特解: 确定了通解中任意常数以后的解.

初始条件: 用来确定任意常数的条件.

$$y(x_0)=y_0\,,\ y'(x_0)=y'_0\,,\cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0{}^{(n-1)}$$

初值问题: 求微分方程满足初始条件的解的问题.

例 $y'=2x$ 且满足 $y(1)=2$ 通解 $y=x^2+C$;

解得 $C=1$ 特解: $y=x^2+1$

解的图象: 微分方程的积分曲线.

通解的图象: 积分曲线族.

例 2 验证:函数$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$是微分方程$\dfrac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$的解. 并求满足初始条件

$x\big|_{t=0} = A, \dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0$的特解. 其中 $k \neq 0$

解 $\because \dfrac{dx}{dt} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt,$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 C_1 \cos kt - k^2 C_2 \sin kt,$$

将$\dfrac{d^2 x}{dt^2}$和x的表达式代入原方程,

$$-k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) + k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) \equiv 0.$$

例 2 验证:函数$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$是微分方程$\dfrac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$的解. 并求满足初始条件

$$x\big|_{t=0}=A,\ \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0}=0$$的特解.

故$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$是原方程的解.

$$\because\ x\big|_{t=0}=A,\quad \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0}=0,\qquad \therefore\ C_1=A,\quad C_2=0.$$

所求特解为 $x=A\cos kt.$

例3. 求下列曲线族所应满足的微分方程

$(1) x^2 + Cy^2 = 1$　　　　$(2) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

解(1) 两边求导：$2x + 2Cyy' = 0$,从原方程可解出 $C = \dfrac{1 - x^2}{y^2}$,

代入，得所求的方程为：$xy + (1 - x^2) yy' = 0$

(2) 求导得 $y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$，　$y'' = C_1 e^x + 4C_2 e^{2x}$

解得　$C_1 = (2y' - y'') e^{-x}$，$C_2 = \dfrac{1}{2}(y'' - y') e^{-2x}$

所满足的微分方程为　$y'' - 3y' + 2y = 0.$

说明：(i)不可升阶；(ii)消去C的方法：“凑法”、解方程法